GEOMETRIA

SECONDA PARTE - Secondo Periodo di lezioni

Prof. Carlo Petronio

SCHEMI RIASSUNTIVI

+

ESERCIZI VARI

+

COMPITI SVOLTI (2013-2014)

master COPY COPISTERIA 050/8312126 388/9837745

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

- COSENO FORMATO DA DUE VETTORI → $\cos\theta = \frac{\langle v \mid w \rangle}{\|v\| \cdot \|w\|}$

$\|v\| = \sqrt{\langle v|v \rangle}$ (NORMA)

- DISTANZA TRA VETTORI → $d(x,y) = \|x-y\|$

- VETTORI ORTOGONALI → $\langle w \mid v \rangle = 0$

- $\langle \cdot | \cdot \rangle_A$ É UN PRODOTTO SCALARE SE HA GLI AUTOVALORI POSITIVI, OPPURE SE $\det(A) > 0$, GLI ELEMENTI SULLA DIAGONALE PRINCIPALE SONO POSITIVI E SE LA MATRICE É SIMMETRICA

(DEGLI AUTOVALORI: $d_1, \frac{d_2}{d_1}, \frac{d_3}{d_2}, \dots$)

• CONICHE

$d_3 \neq 0$ →
- $d_2 = 0$ → PARABOLA
- $d_2 < 0$ → IPERBOLE
- $d_2 > 0$ e $d_1 \cdot d_3 < 0$ → ELLISSE
- $d_2 > 0$ e $d_1 \cdot d_3 > 0$ → INSIEME VUOTO

$d_3 = 0$ → CONICA DEGENERE
- $d_2 < 0$, $\text{rank}(A) = 2$ → 2 RETTE INCIDENTI $(xy = 0)$
- $d_2 > 0$, $\text{rank}(A) = 2$ → SINGOLO PUNTO $(x^2 + y^2 = 0)$
- $d_2 = 0$, $\text{rank}(A) = 2$ → 2 RETTE PARALLELE $(x^2 = 1)$
- $d_2 = 0$, $\text{rank}(A) = 1$ → 2 RETTE COINCIDENTI $(x^2 = 0)$

• QUADRICHE

$d_4 = 0$ → CONICA DEGENERE

$d_4 \neq 0 \rightarrow d_3 = 0$ → PARABOLOIDE
- $d_4^{\oplus}$ → IPERBOLICO
- $d_4^{\ominus}$ → ELLITTICO

$d_3 \neq 0 \rightarrow d_2 > 0$ e $d_1 \cdot d_3 > 0$
- $d_4^{\oplus}$ → INSIEME VUOTO
- $d_4^{\ominus}$ → ELLISSOIDE

NO $d_2 > 0$ e $d_1 \cdot d_3 > 0$ → IPERBOLOIDE
- $d_4^{\oplus}$ → IPERBOLICO O A UNA FALDA
- $d_4^{\ominus}$ → ELLITTICO O A DUE FALDE

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

- CURVATURA CURVA → $k(t) = \frac{\det\left(\alpha'(t) \quad \alpha''(t)\right)}{\|\alpha'(t)\|^3}$, $k(t) = \frac{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3}$

- TORSIONE CURVA → $\tau(t) = \frac{\langle \alpha'(t) \wedge \alpha''(t) \mid \alpha'''(t) \rangle}{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|^2}$

- LUNGHEZZA CURVA → $L(\alpha) = \int_a^b \|\alpha'(t)\| \, dt$

- PER OTTENERE RETTE PROIETTANDO PIANI DEVO SOTTRARRE I PIANI FACENDO VENIRE $z = 0$

es: $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix}$ $\quad 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} z \\ k-5 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2-k \\ 0 \end{pmatrix}$ → PUNTI ALL'INFINITO $[6 : 2-k : 0]$ (PIANO)

- MATRICE CONIUGATA AD A AVENTE DUE SOLI COEFFICIENTI NON NULLI

↳ A DEVE ESSERE ANTISIMMETRICA, TROVO GLI AUTOVALORI → $\lambda_1 = 0$

$\lambda_{2,3} = \pm ki \rightarrow \alpha = k$ (es. $\mathbb{R}^3$)

$$\begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- DATA $\langle x|y\rangle = {}^t x \cdot A \cdot y$, $\langle \cdot | \cdot \rangle$ É UN'APPLICAZIONE SIMMETRICA SE A É SIMMETRICA

- TROVARE GENERATORE DELLA RETTA ORTOGONALE RISPETTO A $\langle \cdot | \cdot \rangle$ AD UN PIANO:

$$\text{PIANO} \to \text{Span}\left(\underbrace{\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}}_{v_1}, \underbrace{\begin{pmatrix}d\\e\\f\end{pmatrix}}_{v_2}\right) \qquad \left.\begin{aligned}\langle w | v_1\rangle_A &= {}^t w \cdot A \cdot v_1 = 0\\ \langle w | v_2\rangle_A &= {}^t w \cdot A \cdot v_2 = 0\end{aligned}\right\} \; w = (A\cdot v_1) \wedge (A \cdot v_2)$$

Se non ho i vettori dello span ma solo l'equazione del piano, devo usare due vettori generici che appartengono al piano (dovuto far venire 0 l'eq. del piano)

- CURVA REGOLARE → FACCIO DERIVATA PRIMA DELLA CURVA E UGUAGLIO LE VARIE COMPONENTI A ZERO, NON DEVONO MAI ANNULLARSI CONTEMPORANEAMENTE

- CURVA SEMPLICE → USO a e b GENERICI AL POSTO DELLE COMPONENTI E LE UGUAGLIO, SE IN UNA DELLE COMPONENTI VIENE $a=b$ É INIETTIVA QUINDI LA CURVA É SEMPLICE

- TROVARE IL PUNTO DI $\{x \in \mathbb{R}^3 : ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0\}$ AVENTE MINIMA DISTANZA DA $de_1 + e e_2 + f e_3$:

$$V = \begin{pmatrix}d\\e\\f\end{pmatrix} \qquad x^\perp = \text{Span}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} \qquad P(x) = V - P(x^\perp) \to \frac{\langle \begin{pmatrix}d\\e\\f\end{pmatrix} | \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\rangle}{a^2+b^2+c^2} \cdot \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$$

- SE MI CHIEDONO UNA BASE <u>ORTONORMALE</u> CHE DIAGONALIZZA UNA MATRICE, DEVO NORMALIZZARE GLI AUTOVETTORI CHE TROVO (STESSA COSA SE CHIEDONO AUTOVETTORE <u>UNITARIO</u>)

- <u>FRENET</u> IN $s=k$ di $\alpha(s)$
  - ▷ VETTORE TANGENTE → $t(k) = \alpha'(k)$ normalizzato
  - ▷ VETTORE NORMALE → $n(k) = \frac{\tilde{n}}{\|\tilde{n}\|}$ con $\tilde{n} = \alpha''(k) - \langle \alpha''(k) | t(k)\rangle \cdot t(k)$
  - ▷ VETTORE BINOMIALE → $b(k) = t(k) \wedge n(k)$

- QUANDO HO $w(x,y) = f\,dx + g\,dy \to \iint \left(\frac{dg}{dx} - \frac{df}{dy}\right) dx\,dy$

- IN $\mathbb{R}^n$ UNA MATRICE AMMETTE SEMPRE UNA BASE ORTONORMALE CHE LA DIAGONALIZZA SE É <u>SIMMETRICA</u> ($A = {}^t A$) → $H \cdot H = H$ (costituita da autovettori della matrice)

- IN $\mathbb{C}^n$ SE UNA MATRICE É <u>HERMITIANA</u> ($A = A^*$) O <u>ANTIHERMITIANA</u> ($A = -A^*$), É DIAGONALIZZABILE TRAMITE MATRICE UNITARIA, É QUINDI POSSIBILE TROVARE UNA BASE ORTONORMALE DI $\mathbb{C}^n$ FORMATA DA SOLO AUTOVETTORI DELLA MATRICE. INOLTRE GLI AUTOVETTORI DELLA HERMITIANA SONO REALI, QUELLI DELLA ANTIHERMITIANA SONO IMMAGINARI PURI

- IN $\mathbb{C}^n$ ESISTE UNA BASE ORTONORMALE DI $\mathbb{C}^n$ CHE DIAGONALIZZA UNA MATRICE, SE LA MATRICE É <u>NORMALE</u> ($A \cdot A^* = A^* \cdot A$) (costituita da autovettori della matrice)

- L'IMMAGINE DI UNA CURVA α É CONTENUTA IN UNA CONICA SE SOSTITUENDO LE COMPONENTI DELLA CURVA NELL'EQUAZIONE DELLA CONICA SI HA UN'IDENTITÀ

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

CONICHE

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

$$\rightarrow A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \quad 3\times 3$$

- d_1 = coeff. di x^2
- $d_2 = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$
- $d_3 = \det(A)$

$\boxed{d_3 \neq 0}$

- $d_2 > 0$ e $d_1 \cdot d_3 > 0 \rightarrow$ INSIEME VUOTO
- $d_2 > 0$ e $d_1 \cdot d_3 < 0 \rightarrow$ ELLISSE
- $d_2 < 0 \rightarrow$ IPERBOLE
- $d_2 = 0 \rightarrow$ PARABOLA

↳ se $d_3 = 0$ la conica è DEGENERE

QUADRICHE

I segni degli autovalori di A sono: $d_1, \frac{d_2}{d_1}, \frac{d_3}{d_2}, \frac{d_4}{d_3}$

- $d_4 = 0 \rightarrow$ CONICA DEGENERE (un vertice)
- $d_4 \neq 0$
  - $d_3 = 0 \rightarrow$ PARABOLOIDE
    - $d_4 \oplus \rightarrow$ IPERBOLICO
    - $d_4 \ominus \rightarrow$ ELLITTICO
  - $d_3 \neq 0$
    - $d_2 > 0$ e $d_1 \cdot d_3 > 0$
      - $d_4 \oplus \rightarrow$ INSIEME VUOTO
      - $d_4 \ominus \rightarrow$ ELLISSOIDE
    - NO $d_2 > 0$ e $d_1 \cdot d_3 > 0$ $\rightarrow$ IPERBOLOIDE
      - $d_4 \oplus \rightarrow$ IPERBOLICO o A UNA FALDA
      - $d_4 \ominus \rightarrow$ IPERBOLOIDE ELLITTICO o A DUE FALDE

master COPY COPISTERIA 050/8512126 388/9837745

↓

CONICHE DEGENERI

$\det(A) = d_3 = 0$

- $d_2 < 0$ e $\text{rank}(A) = 2$ → DUE RETTE INCIDENTI $(xy = 0)$
- $d_2 > 0$ e $\text{rank}(A) = 2$ → SINGOLO PUNTO $(x^2 + y^2 = 0)$
- $d_2 = 0$ e $\text{rank}(A) = 2$ → DUE RETTE PARALLELE $(x^2 = 1)$
- $d_2 = 0$ e $\text{rank}(A) = 1$ → DUE RETTE COINCIDENTI $(x^2 = 0)$

- determinare punti all'infinito
  ↓
  equazione della quadrica = 0 ed eliminiamo i termini di grado 1 (anche i numeri)

- intersezione tra luogo dei punti, retta, e i punti all'infinito
  ↓
  trovo equazione dei punti all'infinito prima espressi, sostituisco $[a(t) : b(t) : c(t)]$ rispettivamente in $x : y : z$ ($[x : y : z]$), mi ricavo le "t" e le sostituisco in $[a(t) : b(t) : c(t)]$ per trovare i punti richiesti

- Stabilire per quali t $[t_1 : t_2 : t_3]$ appartiene alla retta proiettiva passante per $[a : b : c]$ e $[d : e : f]$

  $\left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}\right)$ e $\left(\frac{d}{f}, \frac{e}{f}\right)$ → eq. retta → sostituisco $\left(\frac{t_1}{t_3}, \frac{t_2}{t_3}\right)$
  ↓
  trovo t

master copy 050/8312126 388/9837745